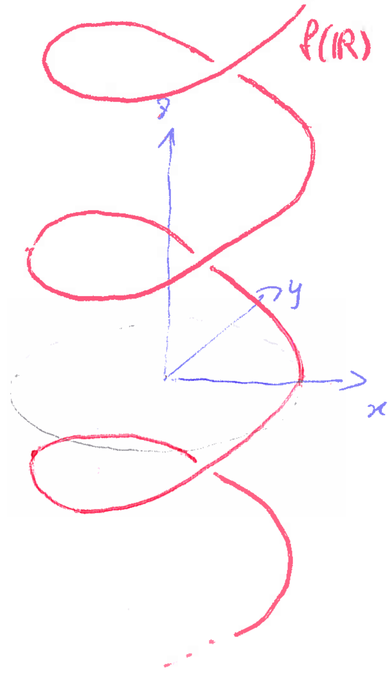
10 08

TD 5

Exo 8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$

a)



b) f est différentiable car ses coordonnées $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto t$ le sont.
(f est même de classe C^∞, car $\uparrow$ le sont)

Pour calculer $df(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (linéaire), il suffit calculer les dérivées des coordonnées.

$df(t) = (\cos' t, \sin' t, 1) = (-\sin t, \cos t, 1)$.

c) $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$, on a alors $f(2\pi) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi, 2\pi) = (1, 0, 2\pi)$.
$f(0) = (\cos 0, \sin 0, 0) = (1, 0, 2\pi)$.

Donc $f(t_1) - f(t_0) = (0, 0, 2\pi) \neq df(t)(t_1 - t_0) = \cancel{(\ldots)}\ (-\sin t, \cos t, 1) \cdot 2\pi$
$\forall t \in [0, 2\pi]$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) car il n'y a pas de t t.q. $\sin t = \cos t = 0$.
(En effet le théorème des accroissements finis en cette version ne vaut que pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable, avec $\underline{m = 1}$).

Exo 10) i) $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$. la boule unité (ouverte).
$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \tan \sqrt{x^2 + y^2}$.

- f est continue, car obtenue comme composition de fonctions continues :

$$\Omega \to \mathbb{R} \quad \cancel{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(x,y) \overset{z}{\mapsto} \sqrt{x^2+y^2} \ (= \|(x,y)\|_2 \quad\quad z \mapsto \tan z.$$

$\uparrow$ continue (car $\|\cdot\|$ est continue) $\qquad \uparrow$ continue sur $[0, 1[$ car $1 \leq \frac{\pi}{2}$

- f est de classe C^1 en $\Omega \setminus \{(0,0)\}$, car composition de fonctions de classe C^1 ($\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en $(0,0)$).

Pour étudier le comportement de f en $(0,0)$, on va calculer les dérivées partielles :

Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(1+\tan^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(1+\tan^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\left(= \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)\right)$.

On remarque que si $y=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = (1+\tan^2|x|)\cdot\frac{x}{|x|}$ $\begin{cases} \to 1 & x\to 0^+ \\ \to -1 & x \to 0^-\end{cases}$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut pas s'étendre par continuité en $(0,0)$.

Il s'en suit que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en Ω.

On montre que f n'est pas non plus différentiable en $(0,0)$.

Essayons de calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$: Soit $g(x) = f(x,0) = \tan|x|$.

Alors $\lim_{h\to 0^+}\frac{\tan|h|}{h} = 1$, mais $\lim_{h\to 0^-}\frac{\tan|h|}{h} = -1$. Donc ~~g~~ g n'est pas dérivable en 0. Il s'en suit que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

(Si elle l'était, elle aurait admis la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ $(= g'(0))$.

(Exo 12 : Remarquons que f est uniformément continue :

Soit $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$, de façon que $B = \overline{\Omega}$ est compact.

Donc $f_B : (x,y)\mapsto \tan\sqrt{x^2+y^2}$ est uniformément continue (par le théorème de Heine), et $f = f_B|_\Omega$ l'est aussi.

~~Ale~~ f est aussi Lipschitzienne. En effet, sur $I=[0,1]$, $\tan|_I$ est lipschitzienne (car $\tan'$ est bornée sur $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, ε assez petit)

Donc $\exists K\in\mathbb{R}_+^*$: $\forall s,t\in[0,1]$, $|\tan s - \tan t| \leq K\cdot|s-t|$

Soit maintenant $p=(x,y)\in\Omega$, $q=(a,b)\in\Omega$. Alors $\|p\|_2<1$, $\|q\|_2<1$ et

$|f(\underbrace{\|p\|_2}_{s}) - f(\underbrace{\|q\|_2}_{t})| \leq K\,\big|\|p\|_2 - \|q\|_2\big| \leq K\cdot\|p-q\|_2$ (par inég. Δ inverse)).

Exo 11) d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \left(x^2 y z \sin\left(\frac{1}{x}\right), 1+y+x\ln|x|\right) & x \neq 0 \\ (0, 1+y) & x = 0. \end{cases}$ 3

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc $\mathcal{C}^0$) en $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=0\}$, car ses coordonnées sont compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

De même pour $f|_{\{x=0\}}$.

Pour vérifier la continuité de f, il faut vérifier que $\forall (y_0,z_0) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = (0, 1+y_0)$

On peut supposer $x \neq 0$ dans la limite (car $f|_{\{x=0\}}$ est continue), et donc on veut calculer:

- $\lim_{(x,y,z)\to(0,y_0,z_0)} x^2 y z \sin\left(\frac{1}{x}\right) \overset{?}{=} 0$. Mais $x^2 \sin\frac{1}{x} \to 0$ pour $x \to 0$, et donc $\lim_{(x,y,z)\to(0,y_0,z_0)} \underbrace{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \cdot \underset{\downarrow\, 0}{y}\, \underset{\downarrow\, 0}{z} = 0$. donc la première coordonnée de f est continue.
- $\lim_{(x,y,z)\to(0,y_0,z_0)} 1+y+x\ln|x| \overset{?}{=} 1+y_0$. Mais $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = 0$ (croissances comparées)

Il s'en suit que il y a l'égalité, ~~et donc~~ la deuxième coordonnée de f est aussi continue. Donc f est de classe $\mathcal{C}^0$.

- Comme $x^2 \sin\frac{1}{x}$ est dérivable en 0, on en déduit que la première coordonnée de f est différentiable en 0. (produit de fonctions différentiables)

Pour la deuxième coordonnée, on a que $x \mapsto x\ln|x|$ n'est pas différentiable en 0. Donc f n'est pas différentiable ~~et donc~~ en $(0,y_0,z_0)$ $\forall (y_0,z_0) \in \mathbb{R}^2$, et donc pas $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$.

(Rmq: la première coordonnée de f n'est pas non plus $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$, car $x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$

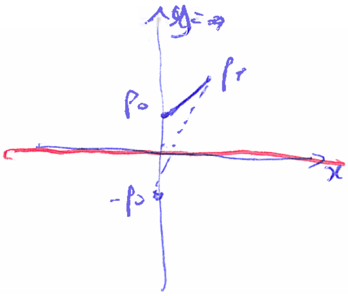
n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. (sa dérivée n'est pas continue en $x=0$).

(Exo 12 : On remarque que f n'est pas lipschitzienne en $\mathbb{R}^3$, ni uniformément continue. Il suffit considérer la première coordonnée de f restreint à $\{x=1, y=z\}$. alors :

$\pi_1 \leftarrow$ 1ère projection

$g(t) = \pi_1 f(1,t,1) = t^2 \sin 1$, n'est pas uniformément continue (vu en TD 2).)

Exo 15) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y + \frac{2e^x}{y}$



a) f est $\mathcal{C}^1$ car somme de $(x,y)\mapsto x^2y$ ($\mathcal{C}^1$ car polyn.)

et $(x,y)\mapsto \frac{2e^x}{y}$, qui est rapport de deux $\mathcal{C}^1$, avec $y\neq 0$, donc $\mathcal{C}^1$.

b) On calcule le gradient de f :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2\frac{e^x}{y}$. $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - \frac{2e^x}{y^2}$.

Donc $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2xy + 2\frac{e^x}{y} ; x^2 - \frac{2e^x}{y^2}\right)$

$p_0 = (0,1)$, $p_1 = (1,2)$, $p_t = (1-t)p_0 + t p_1$ (pour $t\in[0,1]$ c'est le segment entre p_0 et p_1 : $[p_0,p_1]$)

c) Comme $[p_0,p_1] \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* = \mathcal{D}_f$ et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ (il suffit $f|_{[p_0,p_1]}$ dérivable),

par le théorème des accroissements finis, $\exists\, t\in]0,1[$ tel que

$f(p_1) - f(p_0) = \nabla f(p_t)\cdot(p_1 - p_0)$. $\quad (*)$

d) On veut vérifier à la main que $\exists\, t\in]0,1[$ satisfaisant $(*)$

$f(p_1) = f(1,2) = 2 + \frac{2e}{2} = 2+e$. $\quad f(p_0) = f(0,1) = 0 + 2\cdot\frac{e^0}{1} = 2$.

Donc on cherche à trouver t t.q.

$2+e-2 = \nabla f(p_t)\cdot(1,1) = 2x_t y_t + \frac{2e^{x_t}}{y_t} + x_t^2 - \frac{2e^{x_t}}{y_t^2}$, où $(x_t, y_t) = p_t$.

Or, $p_t = (1-t)p_0 + t p_1 = (1-t)(0,1) + t(1,2) = (t ; 1+t)$, d'où je cherche à trouver $t \in]0,1[$ t.q.

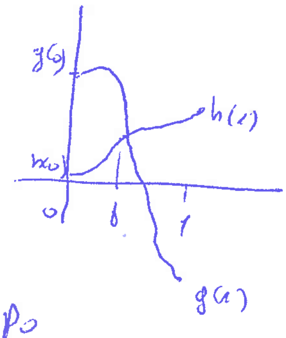
$$e = 2t(1+t) + (1+t)^2 + \frac{2e^t}{1+t} - \frac{2e^t}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \underbrace{(1+t)^2\left(e-1-4t-3t^2\right)}_{g(t)} = \underbrace{\frac{2t\,e^t}{\cancel{2}}}_{h(t)}$$

$\Leftrightarrow$ ~~...~~

Or, $g(0) = \underset{\wedge}{e-1}$, $g(1) = 4\underset{\wedge}{(e-8)}$, $h(0) = 0$ $h(1) = 2e$.

On a donc $\begin{cases} g(0) = e-1 > 0 = h(0) \text{ et} \\ g(1) = 4(e-8) < 0 < 2e = h(1). \end{cases}$ De plus g, h sont continues

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, t \in]0,1[$ t.q. $g(t) = h(t)$



e) Si on considère $\overset{q_0}{-p_0} = (0,-1)$ à la place de p_0, ~~on a~~ et $q_1 = p_0$

que $[\overset{q_0}{-p_0}, \overset{q_1}{p_0}]$ n'est pas contenu dans D_f, et on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Si on veut trouver un $t \in]0,1[$ t.q. $f(q_1) - f(q_0) = \nabla f(q_t)\,(q_1 - q_0)$, avec

$q_t = (1-t)q_0 + tq_1 = (1-t)(0,-1) + t(0,1) = (0;2t-1)$

$f(0,1) = 2$, $f(0,-1) = -2$, et on veut résoudre : $(q_1 - q_0 = (0,2))$

$2-(-2) = \nabla f(q_t)\cdot(0,2) \Leftrightarrow 2 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 2t-1) =$

$= -\frac{2e^0}{(2t-1)^2} \Leftrightarrow (2t-1)^2 = -1$ ~~...~~, qui n'a pas de solutions pour $t \in \mathbb{R}$.